3.6 KOPLINGER MED ASYMMETRISKE ENERGIKILDER

Når flere spenningskilder eller energikilder er koplet sammen og har forskjellig indre resistans og elektromotorisk spenning er det asymmetri. Det er flere metoder som kan benyttes for å finne verdiene i kretsene. Metodene er likninger med to ukjente (eller flere ukjente) kirchhoffs lover, Superposisjonsprinsippet, Nortons teorem og Thèvenins teorem.

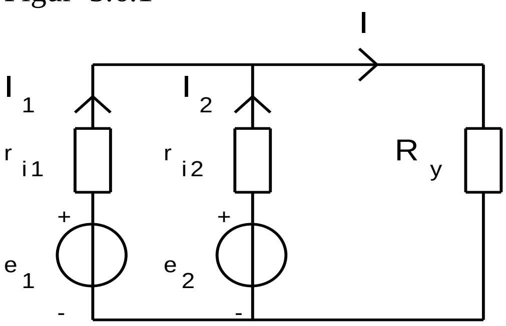
Når et nytt og et gammelt batteri koples sammen i parallell kan strømmen gå fra det nye batteriet og motsatt rettet gjennom det gamle batteriet. Dette medfører at det går liten strøm gjennom ytre belastning.

Når en bil ikke starter og en skal få strøm fra en annen bil med hjelp startkabler starter ofte ikke bilen med en gang. Grunnen til dette er at det må overføres energi fra den bilen med mye energi på batteriet til det batteriet som er utladet. Det dårlige batteriet blir da oppladet så mye etter noen sekunder at bilen starter lettere fordi det kan gå mere strøm til startmotoren til bilen som trenger hjelp.

Disse strømforhold og strømretninger kan vi regne ut med metodene nedenfor.

LIKNINGER MED TO UKJENTE OG KIRCHHOFFS LOVER

Figur 3.6.1



Likninger med to ukjente:

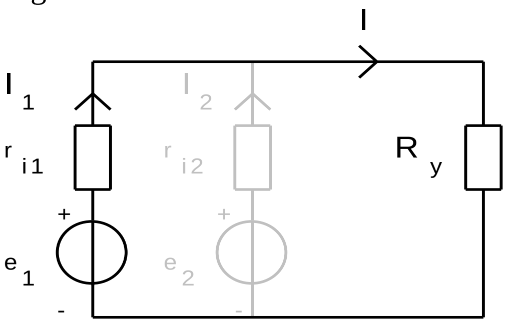
$$\text{I} \qquad I_1 \cdot r_{i1} + I_1 \cdot R_y + I_2 \cdot R_y = e_1$$

$$\text{II} \qquad I_2 \cdot r_{i2} + I_1 \cdot R_y + I_2 \cdot R_y = e_2 \qquad 3.6.1$$

Fremgangsmåte for å sette opp likning I og II:

Del kretsen opp i to deler en for hver likning. Sett opp likning I når gren 2 er tatt vekk fra kretsen. Gren to er gråtonet i figur 3.6.2

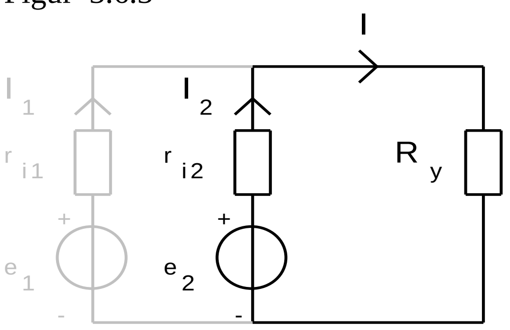
Figur 3.6.2



I $$I_1 \cdot r_{i1} + I_1 \cdot R_y + I_2 \cdot R_y = e_1$$

Når en setter opp likningen for kretsen startes det mellom $\mathbf{e_1}$ og $\mathbf{r_{i1}}$ og går rundt kretsen ved hjelp av ohmslov og kirchhoffs 2. lov.

Figur 3.6.3



II $$I_2 \cdot r_{i2} + I_1 \cdot R_y + I_2 \cdot R_y = e_2$$

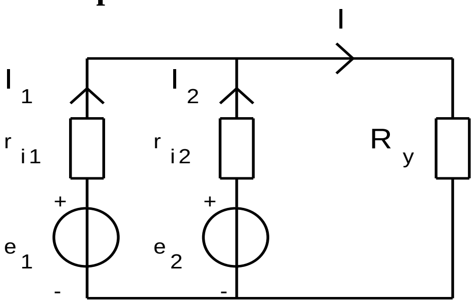
Multipliser inn med verdi (verdier) i en eller begge ligningene for å få en av grenstrømmen til å bli null slik at den andre grenstrømmen kan finnes.

Sett den grenstrømmen som er funnet inn i en av ligningene for å finne den andre grenstrømmen.

Summer grenstrømmene for å finne hovedstrømmen. Pass på fortegnene til grenstrømmene.

Denne metoden er lett å bruke når det bare er to ukjente parallelle strømmer fra hver sin spenningskilde. Når det blir flere enn to parallelle spenningskilder kan en av de andre metodene være lettere å bruke.

Eksempel 3.6.1



Gren I: e_1=2,2 V og r_{i1}==0,015 Ω. Gren II: e_2=2,0 V og r_{i2}==0,10 Ω. R_y=2,0 Ω.

Finn grenstrømmene og hoved strøm i kretsen med hjelp av kirchhoffs lover og likninger med to ukjente.

Løsning:

$$\text{I} \qquad I_1 \cdot r_{i1} + I_1 \cdot R_y + I_2 \cdot R_y = e_1$$
$$\text{II} \qquad I_2 \cdot r_{i2} + I_1 \cdot R_y + I_2 \cdot R_y = e_2$$

$$\text{I} \qquad I_1 \cdot 0{,}015\Omega + I_1 \cdot 2{,}0\Omega + I_2 \cdot 2{,}0\Omega = 2{,}2V$$
$$\text{II} \qquad I_2 \cdot 0{,}10\Omega + I_1 \cdot 2{,}0\Omega + I_2 \cdot 2{,}0\Omega = 2{,}0V$$

$$\text{I} \qquad I_1 \cdot 2{,}015\Omega + I_2 \cdot 2{,}0\Omega = 2{,}2V \qquad |\cdot(-2{,}0)$$
$$\text{II} \qquad I_1 \cdot 2{,}0\Omega + I_2 \cdot 2{,}10\Omega = 2{,}0V \qquad |\cdot 2{,}015$$

$$\text{I} \qquad -I_1 \cdot 4{,}03\Omega - I_2 \cdot 4{,}0\Omega = -4{,}4V$$
$$\text{II} \qquad I_1 \cdot 4{,}03\Omega + I_2 \cdot 4{,}232\Omega = 4{,}03V$$

$$I_2 \cdot 0{,}232\Omega = -0{,}37V$$

$$I_2 = \frac{-0{,}37V}{0{,}232\Omega} = \underline{\underline{-1{,}60A}}$$

Antatt strømretning er slik batteriet er koplet fra pluss til minus. Det har kommet et minustegn foran strømmen I_2, dvs at strømmen er motsatt rettet enn det vi forutsa.

$$\text{I} \qquad I_1 \cdot 2{,}015\Omega + (-1{,}60A \cdot 2{,}0\Omega) = 2{,}2V$$

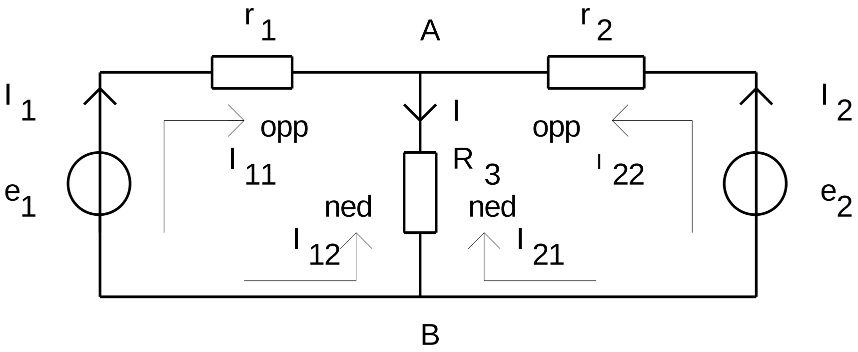
$$I_1 = \frac{2{,}2V - (-1{,}60A \cdot 2{,}0\Omega)}{2{,}015\Omega} = \underline{\underline{2{,}68A}}$$

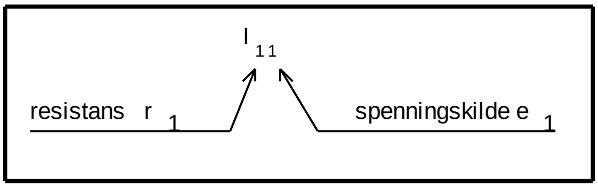
$$I = I_1 + I_2 = -1{,}60A + 2{,}68A = \underline{\underline{1{,}08A}}$$

Legg merke til at grenstrømmen I_1 er større en hoved strømmen I. Grenstrømmen I_2 er negativ dvs at batteri i gren 2 blir tilført energi (oppladet).

SUPERPOSISJONSPRINSIPPET

Figur 3.6.4





Kretsen deles opp i antall ″tilfeller″ det er parallellgrener med spenningskilder. I figur 3.6.4 er det 2 parallellgrener med spenningskilder som gir 2 ″tilfeller″. I hvert av ″tilfellene″ kortsluttes alle spenningskildene utenom en. Det brukes ohms lov og kirchhoffs lover for å finne utrykkene i hvert av ″tilfellene″.

″Tilfelle 1″:

E_2 kortsluttes.

Strømmen "opp" når alle unntatt en spenningskilde er kortsluttet:

I_{11} strøm ut fra positiv side på spenningskilde E_1.

$$\boxed{I_{11} = \frac{e_1}{r_1 + \dfrac{r_2 \cdot R_3}{r_2 + R_3}}} \quad \text{OPP} \qquad 3.6.1$$

Spenningen over ytre resistans, med bare en spenningskilde innkoplet:

$$\boxed{U_{AB1} = e_1 - \Delta U_{r1} = e_1 - I_{11} \cdot r_1} \qquad 3.6.2$$

Strømmen "ned" i ″tilfelle 2″:

I_{21} strøm ut fra negativ side på spenningskilde E_2.

$$\boxed{I_{21} = \frac{U_{AB1}}{r_2}} \quad \text{NED} \qquad 3.6.3$$

″Tilfelle 2″:
E_1 kortsluttes.

Strømmen "opp" når alle unntatt en spenningskilde er kortsluttet

$$\boxed{I_{22} = \frac{e_2}{r_2 + \dfrac{r_1 \cdot R_3}{r_1 + R_3}}} \quad \text{OPP} \qquad 3.6.4$$

Spenningen over ytre resistans, med bare en spenningskilde innkoplet:

$$\boxed{U_{AB2} = e_2 - \Delta U_{r2} = e_2 - I_{22} \cdot r_2} \qquad 3.6.5$$

Strømmen "ned" i ″tilfelle 1″:

$$\boxed{I_{12} = \frac{U_{AB2}}{r_1}} \quad \text{NED} \qquad 3.6.6$$

Strømmen ut fra spenningskilde 1:

$$\boxed{I_1 = I_{11} - I_{12}} \qquad 3.6.7$$

I_{11} og I_{22} OPP strømmer alltid positive strømmer.
I_{21} og I_{12} NED strømmer alltid negative strømmer. Strømmene er negative fordi de alltid går ut fra negativ side på spenningskilde.

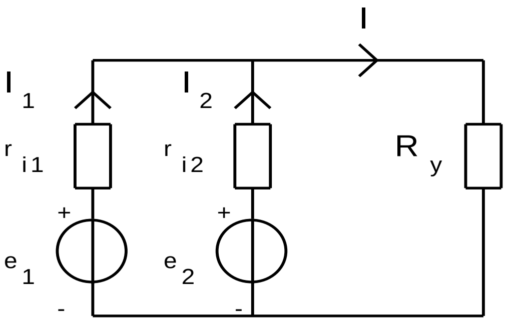
Strømmen ut fra spenningskilde 2:

$$\boxed{I_2 = I_{22} - I_{21}} \qquad 3.6.8$$

Strømmen gjennom belastningsresistans R_3

$$\boxed{I = I_1 + I_2} \qquad 3.6.9$$

Eksempel 3.6 2



Gren I: e_1=2,2 V og r_{i1}==0,015 Ω.   Gren II: e_2=2,0 V og r_{i2}==0,10 Ω. R_y=2,0 Ω.

Finn grenstrømmene og hoved strøm i kretsen med hjelp av superposisjon.

Løsning:

″Tilfelle 1″:

E_2 kortsluttes.

$$I_{11} = \frac{e_1}{r_1 + \frac{r_2 \cdot R_3}{r_2 + R_3}} = \frac{2{,}2V}{0{,}015\Omega + \frac{0.10\Omega \cdot 2{,}0\Omega}{0.10\Omega + 2{,}0\Omega}} = \underline{19{,}96A} \qquad \text{OPP}$$

$$U_{AB1} = e_1 - \Delta U_{R1} = e_1 - I_{11} \cdot r_1 = 2{,}2V - 19{,}96A \cdot 0{,}015\Omega = \underline{1{,}90V}$$

$$I_{21} = \frac{U_{AB1}}{r_2} = \frac{1{,}90V}{0{,}10\Omega} = \underline{19{,}0A} \qquad \text{NED}$$

"Tilfelle 2":

E_1 kortsluttes.

$$I_{22} = \frac{e_2}{r_2 + \frac{r_1 \cdot R_3}{r_1 + R_3}} = \frac{2{,}0V}{0{,}10\Omega + \frac{0{,}015\Omega \cdot 2{,}0\Omega}{0{,}015\Omega + 2{,}0\Omega}} = \underline{17{,}41A}$$ OPP

$$U_{AB2} = e_2 - \Delta U_{R2} = e_2 - I_{22} \cdot r_2 = 2{,}0V - 17{,}4A \cdot 0{,}10\Omega = \underline{0{,}259V}$$

$$I_{12} = \frac{U_{AB2}}{r_1} = \frac{0{,}259V}{0{,}015\Omega} = \underline{17{,}28A}$$ NED

$$I_1 = I_{11} - I_{12} = 19{,}96A - 17{,}28A = \underline{\underline{2{,}68A}}$$

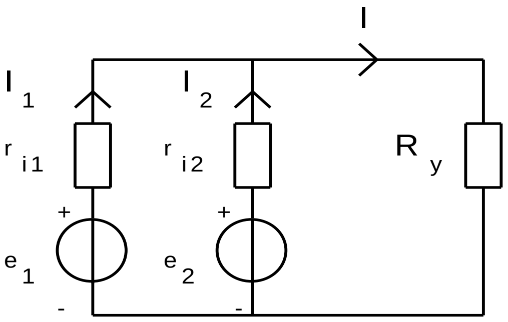
$$I_2 = I_{22} - I_{21} = 17{,}41A - 19{,}0A = \underline{\underline{-1{,}59A}}$$

$$I = I_1 + I_2 = 2{,}68A + (-1{,}59A) = \underline{\underline{1{,}09A}}$$

THÈVENINS TEOREM

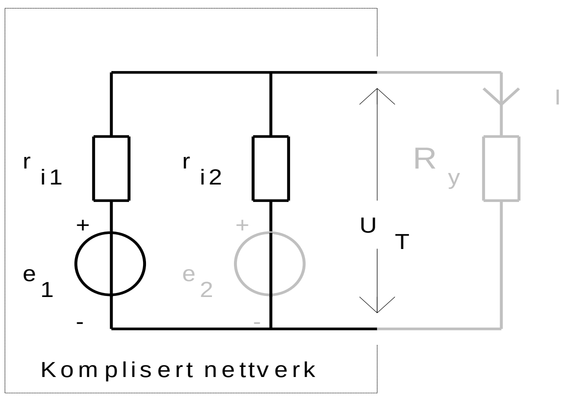
Når en bruker Thèvenins teorem for å løse et komplisert nett regner en bare med en spenningskilde av gangen. De andre spenningskildene kortsluttes, men hvis de har indre reistanser må disse være med i alle utregningene.

Figur 3.6.5



Figur 3.6.5 er utgangspunkt for den kretsen som skal løses. Kretsen må forenkles etter Thèvenins figur.

Figur 3.6.6 Thèvenins figur



Spenningskilde $\mathbf{e_2}$ kortsluttes og ytre resistans hvor strømmen skal finnes koples fra.

Thèvenins fremgangsmåte:

1. Finn ønsket resistans hvor strøm eller spenning skal finnes. Dvs ytre resistans $\mathbf{R_y}$.

2. Kople fra ytre resistans $\mathbf{R_y}$ (hvor strøm eller spenning skal finnes).

3. Finn spenningen over ytre resistans $\mathbf{R_y}$, Thèvenin spenningen $\mathbf{U_T}$.
(Se formel 331, spenningsdeling)

$$\boxed{U_T = e_1 \frac{r_{i2}}{r_{i1} + r_{i2}}} \qquad 3.6.10$$

4. Legg sammen alle indre resistanser $\mathbf{R_i}$, men ikke ytre resistans $\mathbf{R_y}$.
Total indre resistans i gren 1 og i gren 2 regnes i <u>parallell</u>.

$$\boxed{\sum \frac{1}{R_i} = \frac{1}{r_{i1}} + \frac{1}{r_{i2}}} \qquad 3.6.11$$

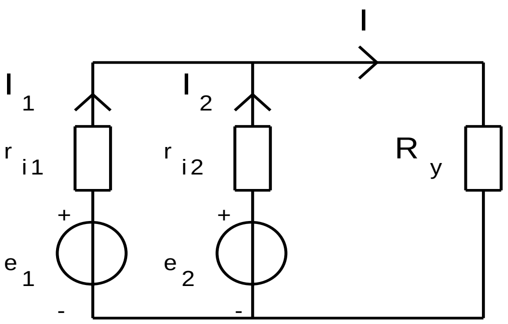
5. Strømmen kan finnes ved formelen

$$\boxed{I_{T1} = \frac{U_T}{(\sum R_i) + R_y}} \qquad 3.6.12$$

Fremgangsmåten til Thèvenin må brukes på alle spenningskilder i kretsen koplet inn alene.
Til slutt legges alle Thèvenin strømmene sammen.

$$\boxed{I = \sum I_T} \qquad 3.6.13$$

Eksempel 3.6.3



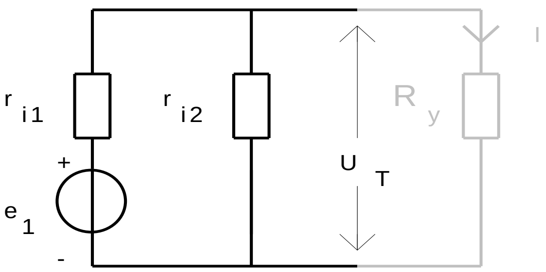
Gren I: e_1=2,2 V og r_{i1}==0,015 Ω. Gren II: e_2=2,0 V og r_{i2}==0,10 Ω. R_y=2,0 Ω.

Finn hoved strøm i kretsen med hjelp av Thèvenins teorem samt grenstrømmen I_1.

Løsning:

DEL 1

e_2 kortsluttet



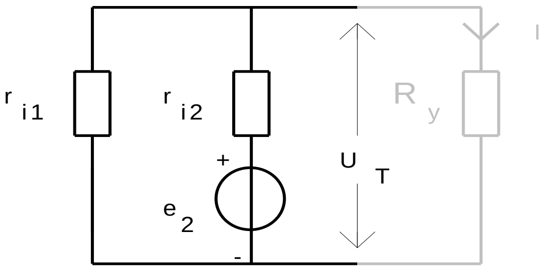
$$U_{T1} = e_1 \frac{r_{i2}}{r_{i1} + r_{i2}} = 2{,}2V \cdot \frac{0{,}10\Omega}{0{,}015\Omega + 0{,}10\Omega} = \underline{1{,}91V}$$

$$\sum \frac{1}{R_i} = \frac{1}{r_{i1}} + \frac{1}{r_{i2}} = \frac{1}{0{,}015\Omega} + \frac{1}{0{,}10\Omega} \qquad R_i = \underline{0{,}013\Omega}$$

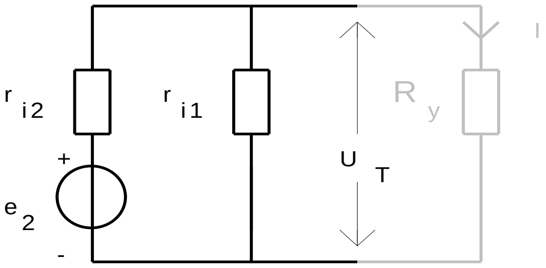
$$I_{T1} = \frac{U_{T1}}{(\sum R_i) + R_y} = \frac{1{,}91V}{0{,}013\Omega + 2{,}0\Omega} = \underline{0{,}949\,A}$$

DEL 2

e_2 kortsluttet



Ved å speilvende alt i kretsen utenom R får vi den ekvivalente (like) figuren:



$$U_{T2} = e_2 \frac{r_{i1}}{r_{i2} + r_{i1}} = 2{,}0V \cdot \frac{0{,}015\Omega}{0{,}10\Omega + 0{,}015\Omega} = \underline{0{,}261V}$$

$$\sum \frac{1}{R_i} = \frac{1}{r_{i1}} + \frac{1}{r_{i2}} = \frac{1}{0{,}015\Omega} + \frac{1}{0{,}10\Omega} \qquad R_i = \underline{0{,}013\Omega}$$

$$I_{T2} = \frac{U_{T2}}{(\sum R_i) + R_y} = \frac{0{,}261V}{0{,}013\Omega + 2{,}0\Omega} = \underline{0{,}129A}$$

$$I = I_{T1} + I_{T2} = 0{,}949A + 0{,}129A = \underline{\underline{1{,}08A}}$$

Grenstrømmene:

$$I_1 \cdot r_{i1} + I \cdot R_y = e_1$$

$$I_1 \cdot 0{,}015\Omega + 1{,}08A \cdot 2{,}0\Omega = 2{,}2V$$

$$I_1 = \frac{2{,}2V - (1{,}08A \cdot 2{,}0\Omega)}{0{,}015\Omega} = \underline{\underline{2{,}67A}}$$

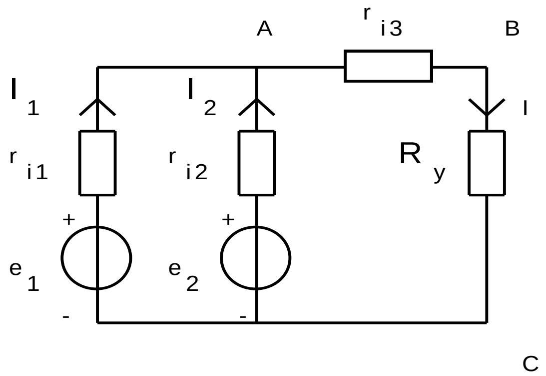
Eksemplene 3.6.1, 3.6.2 og 3.6.3 er like.

NORTONS TEOREM

Når en bruker Nortons teorem for å løse et komplisert nett regner en med en ideell strømkilde om gangen En ideell strømkilde har ikke indre resistans. De andre strømkildene kortsluttes under utregning av DEL 1. Gjenta utregningene etter så mange spenningskilder i parallell som finnes. Hvis den opprinnelige spenningskilden hadde indre resistans må denne være med i alle utregningene.

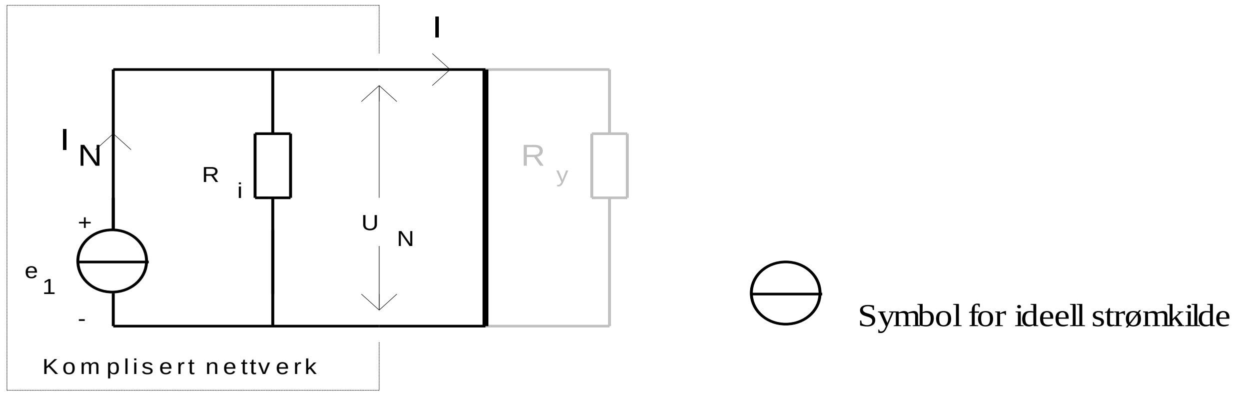
FOR Å KUNNE BRUKE NORTONS TEOREM MÅ DET VÆRE EN RESISTANS I SERIE MED BELASTNINGSRESISTANSEN, ELLERS MÅ THÈVENINS TEOREM BENYTTES.

Figur 3.6.7



Figur 3.6.5 er utgangspunkt for den kretsen som skal løses. Kretsen må forenkles etter Nortons figur

Figur 3.6.8 Nortons figur



Spenningskilde $\mathbf{e_2}$ kortsluttes og ytre resistans hvor strømmen skal finnes koples fra.

Nortons fremgangsmåte:

1. Finn ønsket resistans hvor strøm eller spenning skal finnes. Dvs ytre resistans $\mathbf{R_y}$.

2. Kortslutt ytre resistans $\mathbf{R_y}$ (hvor strøm eller spenning skal finnes). Finn Norton strømmen I_N (kortslutningsstrømmen). Nortonstrømmen I_N er spenningsfallet over serieresistansen R_3 dividert på R_3.

$$\boxed{I_N = \frac{U_{AB}}{R_3}}$$

3. Finn total indre resistans $\mathbf{R_i}$ inne i det kompliserte nettet (ikke regn med $\mathbf{R_y}$).

4. Finn strømmen og spenningen gjennom $\mathbf{R_y}$.

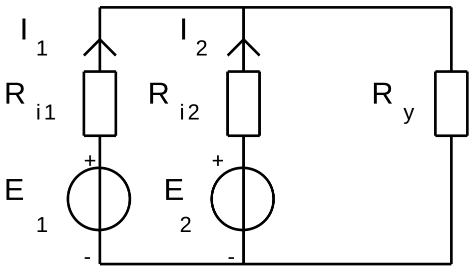
$$\boxed{I_A = I_N \cdot \frac{R_i}{R_i + R_y}}$$

Fremgangsmåten til Norton må brukes på alle spenningskilder i kretsen koplet inn alene. Til slutt legges alle hoved strømmene **I** sammen.

$$\boxed{I_{TOT} = I_A + I_B + I_C + \cdots\cdot I = \sum I}$$

OPPGAVER

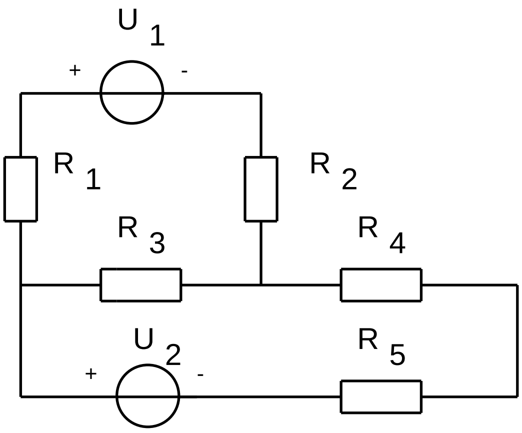
3.6.1



E_1=230 V E_2=200 V R_{i1}=10 Ω R_{i2}=13 Ω R_y=50 Ω

a) Finn grenstrømmene og strømmen gjennom ytre resistans.
b) Finn klemmespenningen.

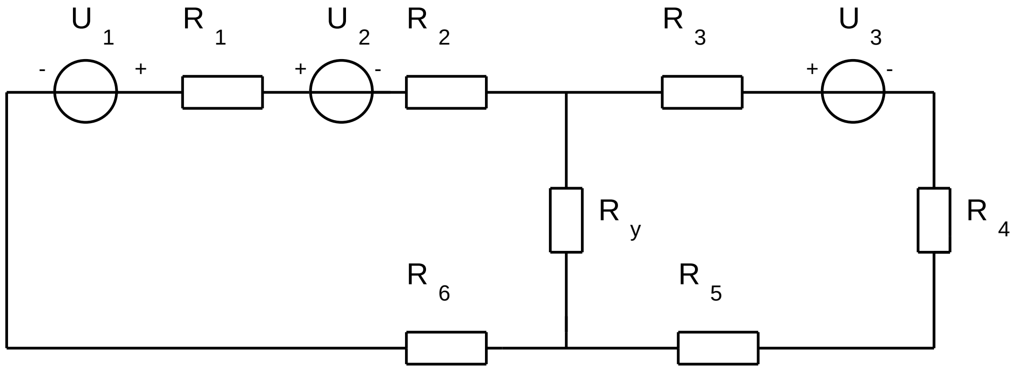
3.6.2



U_1=130 V U_2=110 V R_1=100 Ω R_2=130 Ω R_3=50 Ω R_4=100 Ω R_5=70 Ω

a) Finn grenstrømmene og strømmen gjennom ytre resistans (R_3).
b) Finn spenningen over R_3 .

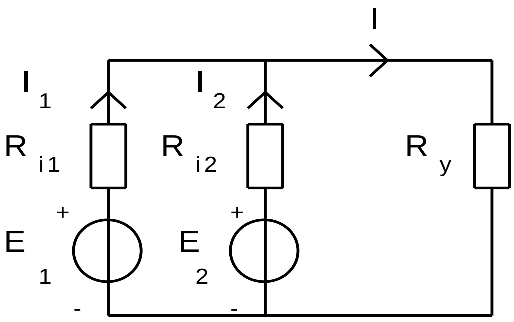
3.6.3



U_1=10 V U_2=12 V U_3=14 V R_1=70Ω R_2=60Ω R_3=50 Ω R_4=40 Ω R_5=50Ω
R_6=70 Ω R_y=100 Ω

a) Finn grenstrømmene og strømmen gjennom ytre resistans.
b) Finn klemmespenningen over R_y .

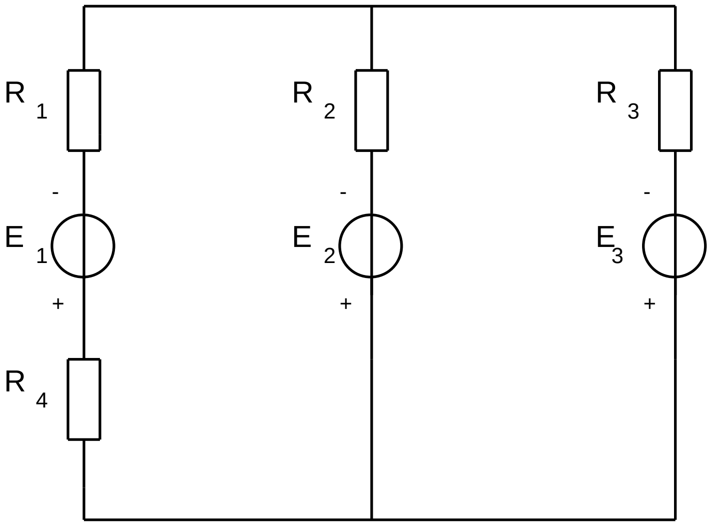
3.6.4



E_1=100 V E_2= 102 V R_{i1}=0,2Ω R_{i2}=0,2Ω I=2 A

a) Beregn grenstrømmene.
b) Hva blir spenningen over ytre resistans og ytre resistans?

3.6.5



E_1=8,0 V E_2= 4,0 V E_3= 6 V R_1=1,0 Ω R_2=6 Ω R_3=4,0 Ω R_4=2,0 Ω

Finn strømmene i kretsen