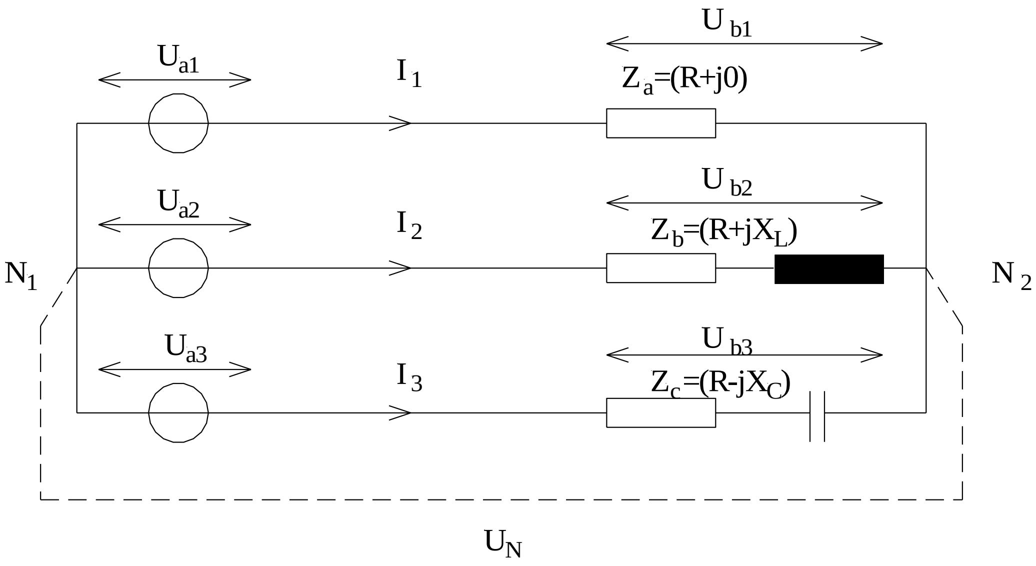
8.5 TREFASE ASYMMETRI MED R - L - C KOMPONENTER
Maria Tragonisi´s metode

Asymmetriske stjernekoplede kretser med forskjellig faseforskyvningsvinkel i fasene må beregnes forskjellig fra asymmetriske trekantkoplede kretser. For å finne et uttrykk for strømmene i fasene kan vi kombinere kirchhoffs 1. og 2. lov som vist nedenfor. Vi kan også benytte andre kjente metoder som f.eks superposisjon for å finne strømmene.

Metoden som er vist i dette kapittel baserer seg på et «stivt nett» hvor hovedspenningene og vinklene mellom hovedspenningene er like.

Figur 8.5.1



Vi kan sette opp tre likninger fra figur 8.5.1 basert på kirchhoffs lover:
Likning I sier at summen av alle strømmene i en krets er lik 0. Likning II og III tar med alle komponenter i hver sin kretsdel. Summen av alle spenningene i hver likning (II og III) er lik 0.

Alle utregninger nedenfor er med komplekse tall:

I $$\overline{I_1} + \overline{I_2} + \overline{I_3} = 0$$

II $$\overline{I_1} \cdot \overline{Z_a} - \overline{I_2} \cdot \overline{Z_b} = \overline{U_{a1}} - \overline{U_{a2}}$$

III $$\overline{I_2} \cdot \overline{Z_b} - \overline{I_3} \cdot \overline{Z_c} = \overline{U_{a2}} - \overline{U_{a3}}$$

Vi kan sette likning I og II på en annen form:

I $$\overline{I_3} = -\overline{I_1} - \overline{I_2}$$

II $$\overline{I_2} = \frac{\overline{I_1} \cdot \overline{Z_a} - \overline{U_{a1}} + \overline{U_{a2}}}{\overline{Z_b}}$$

III+I $$\overline{I_2} \cdot \overline{Z_b} + \overline{I_1} \cdot \overline{Z_c} + \overline{I_2} \cdot \overline{Z_c} = \overline{U_{a2}} - \overline{U_{a3}}$$

III+I $$\overline{I_2} \cdot (\overline{Z_b} + \overline{Z_c}) + \overline{I_1} \cdot \overline{Z_c} = \overline{U_{a2}} - \overline{U_{a3}}$$

III+I+II $$\overline{I_1} = \frac{\overline{U_{a2}} - \overline{U_{a3}} - \left(\frac{\overline{I_1} \cdot \overline{Z_a} - \overline{U_{a1}} + \overline{U_{a2}}}{\overline{Z_b}} \right) \cdot \overline{Z_b} + \overline{Z_c}}{\overline{Z_c}} \qquad \frac{\left| \cdot \overline{Z_b} \right.}{\left| \cdot \overline{Z_b} \right.}$$

$$\overline{I_1} \cdot \overline{Z_c} \cdot \overline{Z_b} = \frac{\overline{Z_b} \cdot \overline{U_{a2}} - \overline{Z_b} \cdot \overline{U_{a3}} - (\overline{I_1} \cdot \overline{Z_a} - \overline{U_{a1}} + \overline{U_{a2}}) \cdot (\overline{Z_b} + \overline{Z_c})}{\overline{Z_c} \cdot \overline{Z_b}} \qquad \left| \cdot \overline{Z_c} \cdot \overline{Z_b} \right.$$

$$\overline{I_1} \cdot \overline{Z_c} \cdot \overline{Z_b} = \overline{Z_b} \cdot \overline{U_{a2}} - \overline{Z_b} \cdot \overline{U_{a3}} - \overline{I_1} \cdot \overline{Z_a} \cdot \overline{Z_b} - \overline{I_1} \cdot \overline{Z_a} \cdot \overline{Z_c} + \overline{U_{a1}} \cdot \overline{Z_b} + \overline{U_{a1}} \cdot \overline{Z_c} - \overline{U_{a2}} \cdot \overline{Z_b} - \overline{U_{a2}} \cdot \overline{Z_c}$$

$$\overline{I_1} \cdot (\overline{Z_c} \cdot \overline{Z_b} + \overline{Z_a} \cdot \overline{Z_b} + \overline{Z_a} \cdot \overline{Z_c}) = -\overline{Z_b} \cdot \overline{U_{a3}} + \overline{U_{a1}} \cdot \overline{Z_b} + \overline{U_{a1}} \cdot \overline{Z_c} - \overline{U_{a2}} \cdot \overline{Z_c}$$

IV $$\overline{I_1} = \frac{\overline{U_{a1}} \cdot (\overline{Z_b} + \overline{Z_c}) - \overline{U_{a2}} \cdot \overline{Z_c} - \overline{U_{a3}} \cdot \overline{Z_b}}{\overline{Z_c} \cdot \overline{Z_b} + \overline{Z_a} \cdot \overline{Z_b} + \overline{Z_a} \cdot \overline{Z_c}}$$

Nevneren i uttrykket over kan settes som Y og finnes som vektor i figur 8.5.2.

Nå har vi funnet et uttrykk for den ene hovedstrømmen i kretsen. Dette uttrykket kan forenkles som vist nedenfor. De andre strømmene $\mathbf{I_2}$ og $\mathbf{I_3}$ kan utledes på samme måte som over. Legg merke til at nevneren i uttrykket vil bli lik for alle strømmene.

Når uttrykket over skal løses kun komplekst kan vi ta utgangspunkt i uttrykket for strømmen **I₁** over og benytte U_{a1} som referansevektor får vi: (Se figur 8.5.2)

$$\overline{U_{a2}} = X^2 \cdot \overline{U_{a1}}$$

$$\overline{U_{a3}} = X \cdot \overline{U_{a1}}$$

Likning **IV** gir følgende uttrykk i telleren:

$$\overline{Y} = \overline{U_{a1}} \cdot (\overline{Z_b} + \overline{Z_c}) - \overline{U_{a2}} \cdot \overline{Z_c} - \overline{U_{a3}} \cdot \overline{Z_b} = Y\angle\alpha_1$$

Vektoren **Y** med vinkelen **α** finner vi igjen i figur 8.5.2.

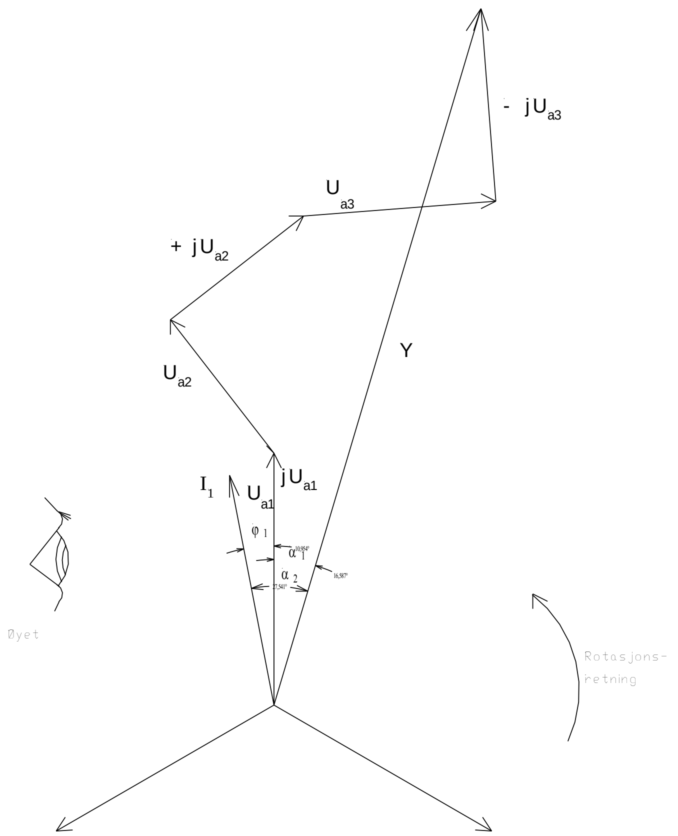
Likning **IV** gir følgende uttrykk i nevneren:

$$\overline{W} = \overline{Z_a} \cdot \overline{Z_b} + \overline{Z_b} \cdot \overline{Z_c} + \overline{Z_c} \cdot \overline{Z_a} = W\angle\alpha_2$$

Nevner dividert på teller i uttrykkene over gir oss strømmen I_1:

$$\overline{I_1} = \frac{Y\angle\alpha_1}{W\angle\alpha_2} = I_1\angle\varphi_1$$

Figur 8.5.2



For å forenkle nevneren i utrykket over multipliserer vi inn **(Z_b+ Z_c)** og setter inn uttrykkene over for spenningene **U_{a2}** og **U_{a3}** inn i formelen over for hovedstrømmen **I_1**. Dette gir oss:

$$\overline{I}_1 = \overline{U}_{a1} \cdot \frac{(1-X)\cdot \overline{Z}_b + (1-X^2)\cdot \overline{Z}_c}{\overline{Z}_a \cdot (\overline{Z}_b + \overline{Z}_c) + (\overline{Z}_b \cdot \overline{Z}_c)}$$

X og **X^2** gir oss når vi setter inn for vinklene et forenklet uttrykk for hovedstrømmen **I_1**:

$$\boxed{\overline{I}_1 = \overline{U}_{a1} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot \overline{Z}_b + \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot \overline{Z}_c}{\overline{Z}_a \cdot (\overline{Z}_b + \overline{Z}_c) + (\overline{Z}_b \cdot \overline{Z}_c)}} \qquad 8.5.1.a$$

Hovedstrømmen **I_2**:

$$\boxed{\overline{I}_2 = \overline{U}_{a2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot \overline{Z}_c + \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot \overline{Z}_a}{\overline{Z}_b \cdot (\overline{Z}_c + \overline{Z}_a) + (\overline{Z}_c \cdot \overline{Z}_a)}} \qquad 8.5.1.b$$

Hovedstrømmen **I_3**:

$$\boxed{\overline{I}_3 = \overline{U}_{a3} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot \overline{Z}_a + \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot \overline{Z}_b}{\overline{Z}_c \cdot (\overline{Z}_a + \overline{Z}_b) + (\overline{Z}_a \cdot \overline{Z}_b)}} \qquad 8.5.1.c$$

Maria Tragonisi´s formler for fasestrømmene i flerfaset nett med resestive-, kapasitive og induktive belastninger i asymmetri.

Spenningen mellom de to stjernepunktene (i dette tilfelle regnet ut fra fase 1):

$$\boxed{\overline{U}_N = \overline{U}_{a1} - \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_a} \qquad 8.5.2$$

NB! ***Spenningen mellom nullpunktene kan ikke bli større enn en av de påtrykte fasespenningene*** $\boldsymbol{U_a}$.

Fasespenningen i fas 1:

$$\boxed{\overline{U}_{b1} = \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_a} \qquad 8.5.3$$

Fasespenningen i fas 2:

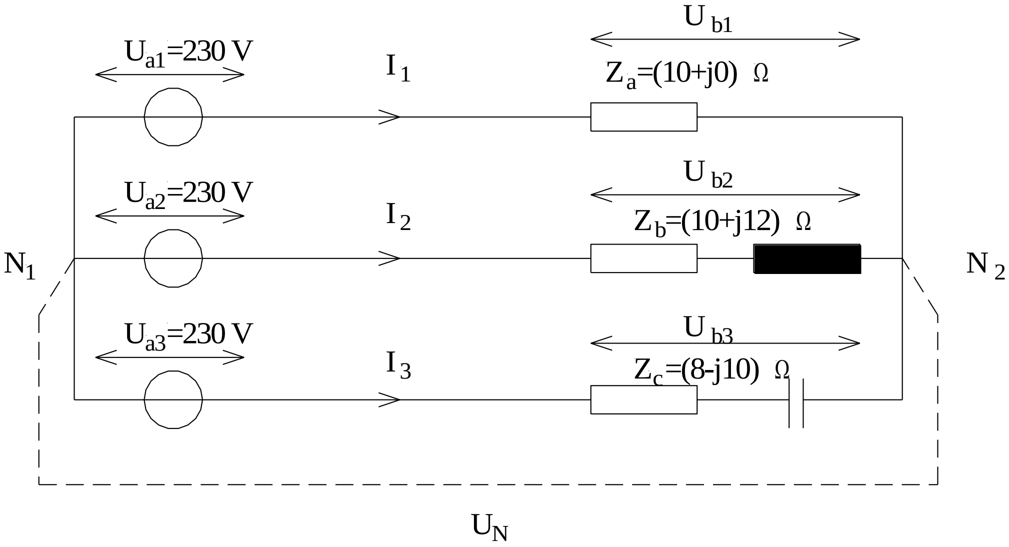
$$\boxed{\overline{U}_{b2} = \overline{I}_2 \cdot \overline{Z}_b} \qquad 8.5.4$$

Fasespenningen i fas 3:

$$\boxed{\overline{U}_{b3} = \overline{I}_3 \cdot \overline{Z}_c} \qquad 8.5.5$$

U_{a1} fasespenningen over spenningskilden i fase 1 (V)
U_{b2} fasespenningen over belastningen i fase 1 (V)
I Strømmen i fas 1 (A)
Z_a belastningsimpedansen i fase 1 (Ω)
U_N spenningen mellom nullpunktene (V)

Eksempel 8.5.1



Påtrykt fasespenninger U_a er 230V i hver fase og vinkelen mellom påtrykte fasespenningene 120°. Resistanser og reaktanser er oppgitt i Ω.

a) Finn strømmen i I_2 og faseforskyvningsvinkelende φ_2 .
b) Beregn spenningen mellom stjernepunktene og vinkelen mellom den påtrykte spenningen U_{a2} og spenningen U_N .
c) Hva blir fasespenningen over belastningen Z_b?
d) Tegn vektordiagram for oppgitte og beregnede verdier.

Løsning:

a) Strømmen $\mathbf{I_2}$

$$\bar{I}_2 = \bar{U}_{a2}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\bar{Z}_c+\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\bar{Z}_a}{\bar{Z}_b\cdot\left(\bar{Z}_c+\bar{Z}_a\right)+\left(\bar{Z}_c\cdot\bar{Z}_a\right)} = 230V\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(8\Omega-j10\Omega\right)+\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(10\Omega\right)}{(10\Omega+j12\Omega)\cdot\left(\left(8\Omega-j10\Omega\right)+10\Omega\right)+\left(8\Omega-j10\Omega\right)\cdot10\Omega} =$$

$$230V\cdot\frac{(12-j15-j6{,}93-8{,}66+15+j8{,}66)\Omega}{(10\Omega+j12\Omega)\cdot\left(18\Omega-j10\Omega\right)+\left(80(\Omega)^2-j100(\Omega)^2\right)} =$$

$$230V\cdot\frac{18{,}34\Omega-j13{,}27\Omega}{180(\Omega)^2-j100(\Omega)^2+j216(\Omega)^2+120(\Omega)^2+80(\Omega)^2-j100(\Omega)^2} = 230V\cdot\frac{18{,}34\Omega-j13{,}27\Omega}{380(\Omega)^2+j16(\Omega)^2} =$$

$$230V\cdot\frac{22{,}64\Omega\angle-35{,}89°}{380{,}3(\Omega)^2\angle2{,}41°} = \underline{\underline{13{,}69A\angle-38{,}3°}} \qquad \alpha_{a2} = \alpha_A-\alpha_B = -35{,}89°-2{,}41° = -\underline{38{,}3°}$$

Vektoren I_2 er 38,3° etter vektoren U_{a2} pga negativ vinkel (φ_{a2}).

b) Spenningen **U_N** mellom stjernepunktene

$$\overline{U}_N = \overline{U}_{a2} - \overline{I}_2 \cdot \overline{Z}_b = 230V - (13{,}69A\angle -38{,}3°\cdot(10\Omega + j12\Omega)) =$$

$$230V - (10{,}74A - j8{,}48A)\cdot(10\Omega + j12\Omega) = 230V - (209{,}2V + 44{,}1V) = 20{,}8V - j44{,}1V = \underline{\underline{48{,}7V\angle -64{,}7°}}$$

Vektoren U_N er 76,2° etter vektoren U_{a2} pga negativ vinkel (α_N).

c) Spenningen **U_{b2}** over belastningen **Z_b**

$$\overline{U}_{b2} = \overline{I}_2 \cdot \overline{Z}_b = 13{,}69A\angle -38{,}3°\cdot 15{,}62\Omega\angle 50{,}19° = \underline{\underline{213{,}8A\angle 11{,}9°}}$$

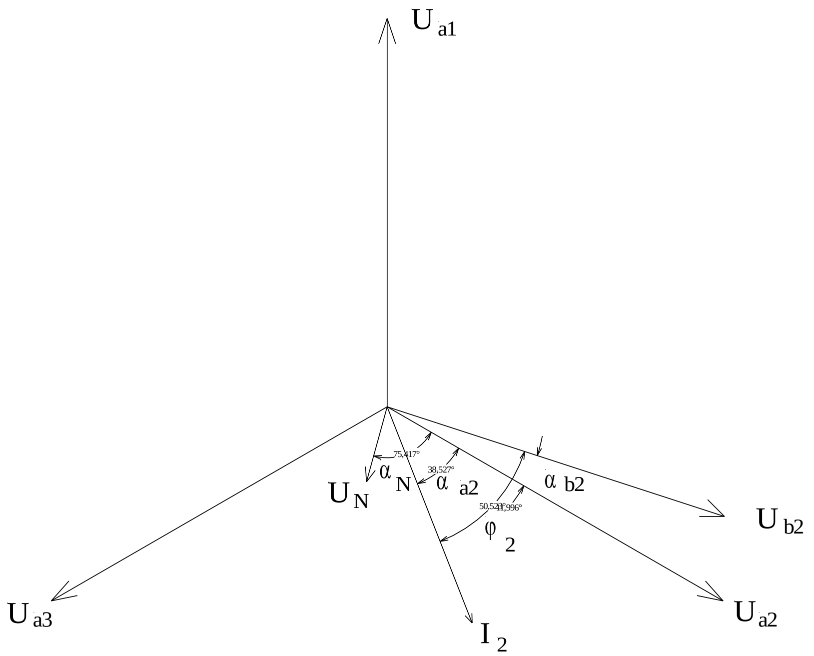
$$\alpha_{b2} = \alpha_a + \alpha_b = -38{,}3° + 50{,}19° = \underline{11{,}9°}$$

Vektoren U_{b2} er 11,9° foran vektoren U_{a2} pga positiv vinkel (φ_2).

Faseforskyvningsvinkelen φ_2

$$|\varphi_2| = \alpha_{a2} + \alpha_{b2} = 38{,}3° + 11{,}9° = \underline{50{,}2°} \qquad \text{eller} \qquad Z_2 = 10\Omega + j12\Omega = 15{,}62\Omega\angle \underline{50{,}2°}$$

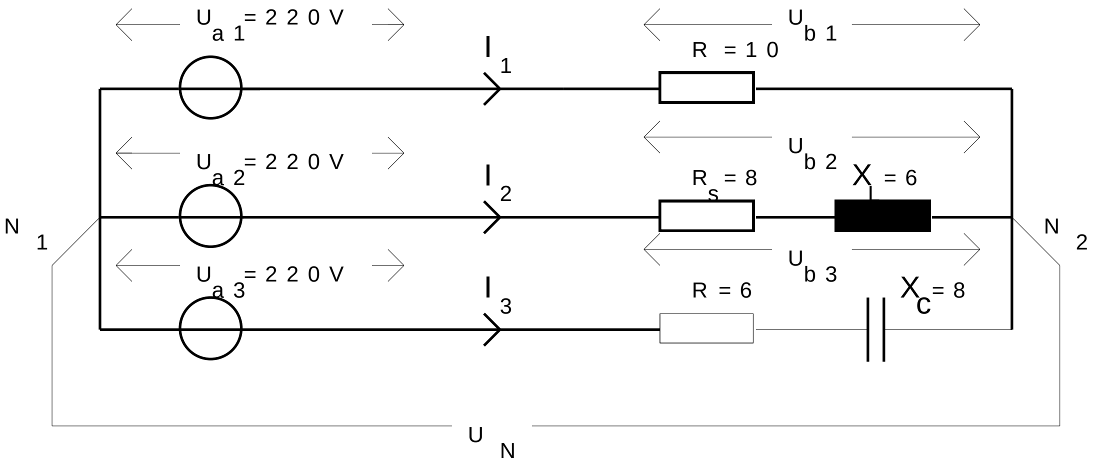
d) Vektordiagram



Strømmene **I_1** kan konstrueres fra referansespenningen **U_{a1}** og strømmen **I_3** kan konstrueres fra referansespenningen **U_{a3}** . Spenningen **U_N** blir aldri større enn en av de påtrykte spenningene **U_a** .

OPPGAVER

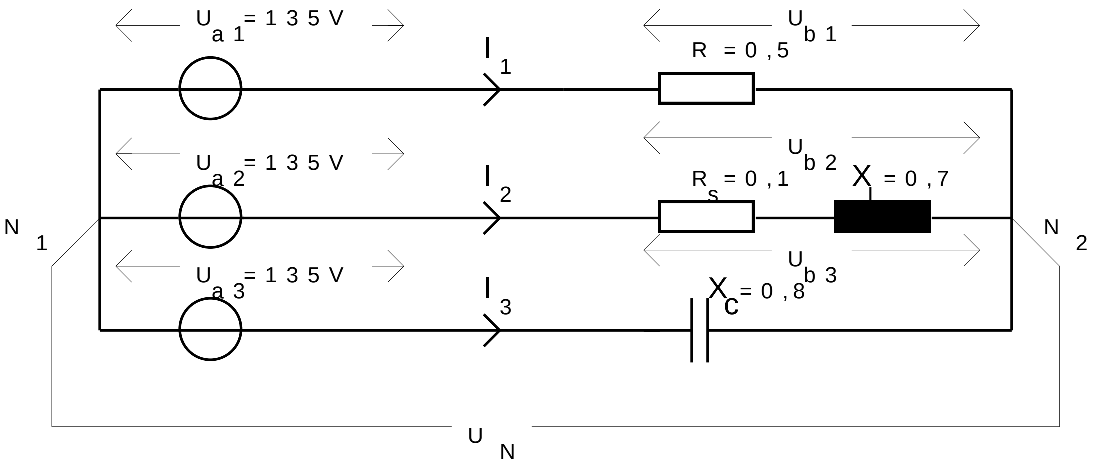
8.5.1



Resistanser og reaktanser er oppgitt i Ω.

a) Finn strømmene i kretsen og faseforskyvningsvinkelene i hver fase.
b) Beregn spenningen mellom stjernepunktene og vinkelen mellom en av de påtrykte spenningene.
c) Hva blir fasespenningene over belastningene?
d) Tegn vektordiagram for hele kretsen.

8.5.2



Resistanser og reaktanser er oppgitt i Ω.

a) Finn strømmene i kretsen og faseforskyvningsvinkelene i hver fase.

b) Hva blir fasespenningene over belastningene og beregn spenningen mellom stjernepunktene og vinkelen mellom en av de påtrykte spenningene.

c) Konstruer et vektordiagram for hele kretsen.